Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za matematiku

SEMINARSKI RAD

Lotka – Volterra model

STUDIJ: Diplomski studij Ekoinženjerstvo
KOLEGIJ: Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

PREDMETNI NASTAVNIK:
Dr. sc. Ivica Gusić, redovni profesor

ASISTENT:
Dr. sc. Miroslav Jerković, viši asistent

STUDENTI:
Iva Kovačić
Sonja Omerzo

Zagreb, lipanj 2010. godine

SADRŽAJ

1. UVOD

Lotka-Volterra model tj. grabežljivac-plijen model, u početku je predložio Alfred J. Lotka u "Teoriji autokatalitičkih kemijskih reakcija", 1910. godine. To su zapravo logističke jednadžbe, koje je izveo Pierre François Verhulst. 1920. godine Lotka model je proširen putem Kolmogorovog modela za "organski sustav" pomoću biljnih vrsta i biljojedne životinjske vrste, a od 1925. godine se najviše koristi za analizu jednadžbe interakcije grabežljivac-plijen. Vito Volterra, koji je stvorio statističku analizu ulova riba u Jadranu, samostalno je istraživao jednadžbe u 1926. godini. C.S. Holling proširio je ovaj model još jednom, 1959. godine u dva rada, u kojima je predložio ideju funkcionalnog odgovora. Lotka-Volterra model i Hollingovo proširenje su korišteni za modeliranje populacije losa i vuka u Isle Royale Nacionalnom parku, te su sa preko 50 objavljenih radova jedna od najboljih studija odnosa grabežljivac-plijen.

Populacije grabežljivca i plijena mogu utjecati jedni drugima na evoluciju. Ona životinjska vrsta u prirodi koja ima bolje sposobnosti pronalaženja i hvatanja plijena bit će definirana kao grabežljivac, dok će slabija vrsta koja ima potrebu samo braniti se, tj. ne biti pojedena, biti definirana kao plijen. Osobine tih dviju vrsta nisu kompatibilne što utječe na dinamiku populacija grabežljivca i plijena. Dinamički odnos između grabežljivca i plijena je jedna od dominantnih tema ekologije.

2. LOTKA – VOLTERRA MODEL

2.1. Lotka – Volterra jednadžbe

Lotka-Volterra jednadžbe također su poznate kao jednadžbe grabežljivac-plijen. To su nelinearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda koje se često koriste za opisivanje dinamike bioloških sustava u kojima djeluju međusobno dvije vrste, jedan grabežljivac i jedan plijen. Oni se razvijaju u vremenu prema jednadžbama:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x) \tag{2}$$

gdje je:

* y – broj grabežljivaca (na primjer, vuk);
* x - broj plijena (na primjer, kunić);
* dy/ dt i dx/dt – brzina rasta dviju populacija s vremenom;
* t - vrijeme, i
* α, β, γ i δ - parametri koji predstavljaju interakciju dviju vrsta.

2.1.1. Fizikalno značenje jednadžbi

Lotka-Volterra model zasnovan je na temelju pretpostavki o okolini i evoluciji populacije predatora i plijena:

1. Populacija plijena pronalazi dovoljno hrane u svakom trenutku.
2. Zalihe hrane za predatora ovise isključivo o populaciji plijena.
3. Stopa promjene populacije je proporcionalna njegovoj veličini.
4. Tijekom procesa, okoliš se ne mijenja u korist jedne vrste i genetska prilagodba je spora.

Kako su korištene diferencijalne jednadžbe, rješenja su realna (deterministička) i kontinuirana. To podrazumijeva da se populacije obje vrste, plijena i predatora, kontinuirano preklapaju, tj. populacija predatora prati populaciju plijena sa malim zaostatkom u vremenu.

2.1.2. Plijen

Nakon množenja jednadžba (1), postaje:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy. \tag{3}$$

Kada bi pretpostavili da plijen ima neograničene zalihe hrane i kada ne bi bilo grabežljivaca, razvijao bi se eksponencijalno u vremenu t. Taj eksponencijalni rast predstavlja αx član jednadžbe. Pretpostavlja se da je stopa grabežljivaca na plijen proporcionalna stopi susretanja grabežljivaca i plijena, što je opisano $-\beta xy$ članom. Ako su x ili y u drugom članu jednadžbe jednaki nuli tada nema istrebljivanja.

Jednadžba prikazuje promjenu u populaciji plijena; stopa rasta plijena umanjena za stopu susretanja grabežljivca i plijena (plijen je pojeden od grabežljivca).

2.1.3. Grabežljivac

Kad se pomnoži jednadžba (2), jednadžba grabežljivca postaje:

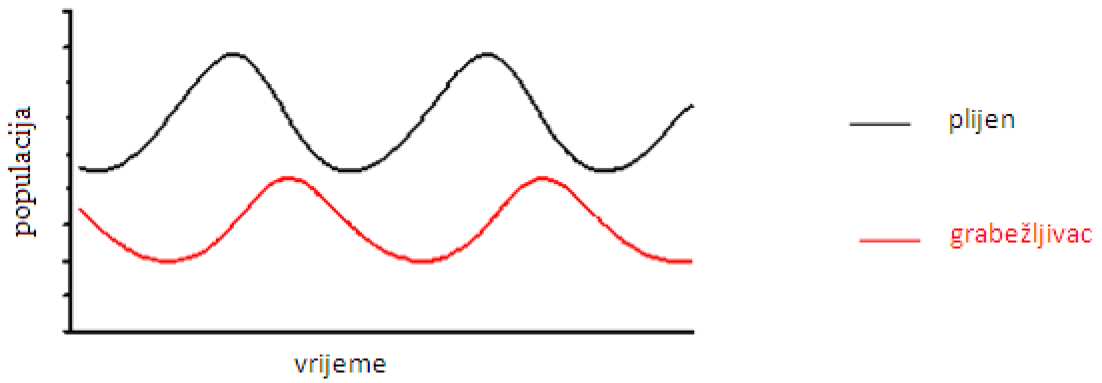
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y. \tag{4}$$

U ovoj jednadžbi, δxy predstavlja stopu rasta populacije grabežljivaca. Drugi član jednadžbe $-\gamma y$ predstavlja stopu izumiranja grabežljivca, bilo zbog prirodne smrti ili emigracije, što dovodi do eksponencijalnog pada grabežljivca.

Jednadžba prikazuje promjenu u populaciji grabežljivca; porast opskrbe hranom umanjeno za prirodnu smrt ili emigraciju.

2.2. Rješenja jednadžbe

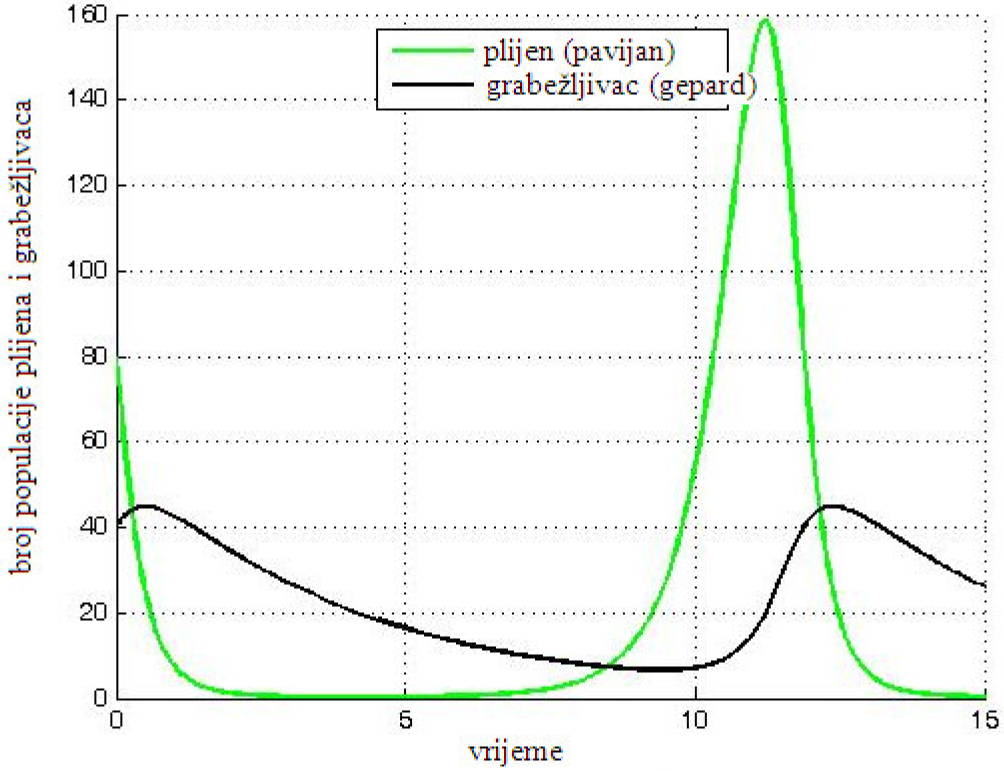
Jednadžbe imaju periodna rješenja koja nemaju jednostavni izraz u smislu uobičajenih trigonometrijskih funkcija. Međutim, linearizacija jednadžbi daje rješenja slična jednostavnom harmonijskom gibanju pri čemu populacija grabežljivca slijedi gibanje plijena.



Slika 1. Promjena populacija grabežljivca i plijena u vremenu

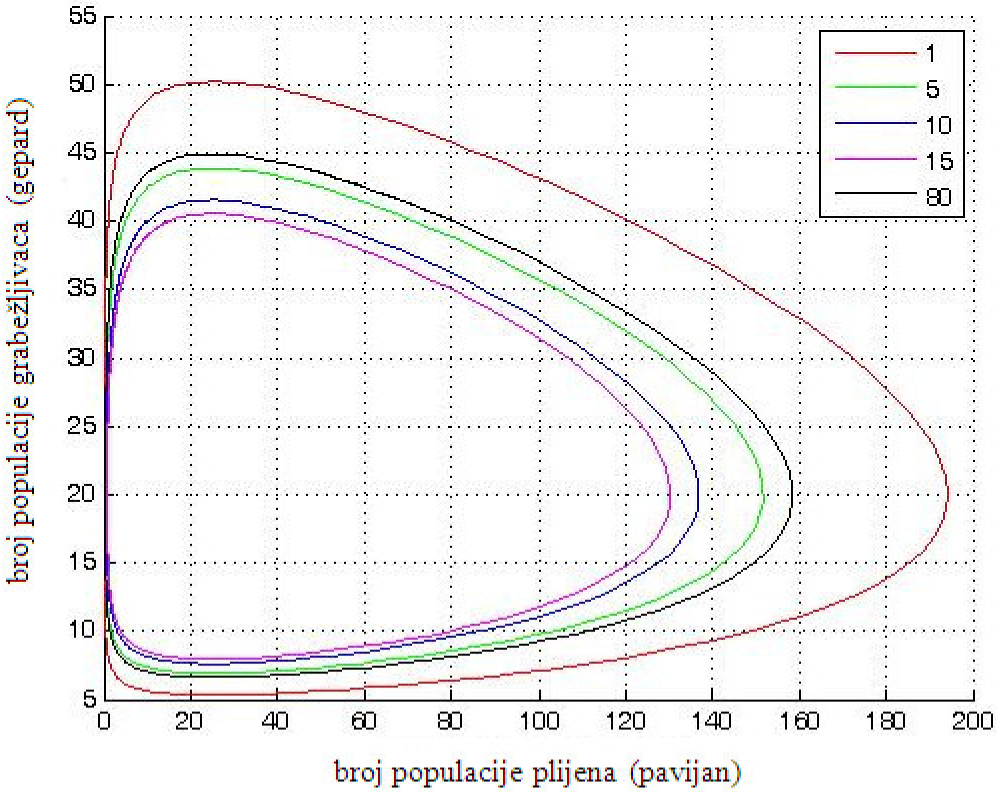
2.3. Primjer problema

Pretpostavimo da postoje dvije vrste životinja, pavijan (plijen) i gepard (grabežljivac). Ako su početni uvjeti pavijana 80 i geparda40, može se prikazati napredak dvije vrste u nekom određenom vremenu. Vremenski interval je proizvoljan.



Slika 2. Promjena populacija u vremenu na primjeru pavijana i geparda

Također se mogu prikazati parcijalna rješenja koja odgovaraju prirodnoj oscilaciji populacija dviju vrsta. Ovo rješenje je u stanju dinamičke ravnoteže. U bilo kojem vremenu ove faze, sustav se nalazi negdje unutar eliptičnih rješenja (koje su prikazane krivuljama). Ne postoje posebni početni uvjeti unutar granica ciklusa, a time niti stabilno rješenje, međutim, uvijek se postiže neki konačni rezultat.



Slika 3. Parcijalna rješenja prirodne oscilacije populacija grabežljivca i plijena

Ovi grafovi jasno pokazuju ozbiljan problem za ovaj biološki model: u svakom ciklusu, populacija pavijana se smanjuje na iznimno male brojeve bez obzira na njihov oporavak, dok populacija geparda ostaje postojana i kod najnižeg broja populacije pavijana. Ipak sa sve većim izumiranjem pavijana jednom kao posljedica treba doći i do značajnog smanjenja populacije geparda.

2.3.1. Dinamika sustava

U modelu, grabežljivac napreduje kada ima plijena u izobilju, ali nakon određenog vremena kada pojede sav plijen, doći će do smanjenja populacije grabežljivaca, a zatim i njegovog izumiranja.Kada je populacija grabežljivaca niska populacija plijena će se ponovno povećati. Ta dinamika opisana je kontinuiranim ciklusom rasta i pada.

2.4. Ravnoteža populacije

Ravnoteža populacije u modelu se postiže kada obje populacije miruju (ne mijenjaju se) odnosno kada su obje derivacije jednake 0.

$$x(\alpha - \beta y) = 0 \qquad (5)$$

$$-y(\gamma - \delta x) = 0 \qquad (6)$$

Rješavanjem navedenih diferencijalnih jednadžbi (5 i 6) dolazimo do ovih rješenja:

$$\{y = 0, x = 0\}$$

i

$$\left\{y = \frac{\alpha}{\beta}, x = \frac{\gamma}{\delta}\right\},$$

dakle, postoje dvije ravnoteže.

Prvo rješenje predstavlja izumiranje obje vrste, što znači da obje populacije ostaju jednake 0. Drugo rješenje predstavlja fiksnu točku u kojoj obje populacije imaju svoju trenutnu vrijednost, različitu od nule. Razina populacije pri kojima se postižu navedene ravnoteže ovisi o vrijednostima parametara α, β, γ, δ.

2.4.1. Stabilnost fiksnih točaka

Stabilnost prve fiksne točke izravno može biti određena provođenjem linearizacije pomoću parcijalnih derivacija.

Deriviranjem desne strane jednadžbi:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy. \qquad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y. \tag{8}$$

dobiva se Jacobijeva matrica modela grabežljivac-plijen:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}. \tag{9}$$

2.4.1.1. Prva fiksna točka

Kada se pretpostavi ravnoteža (0, 0) Jacobijeva matrica J postaje:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Svojstvene vrijednosti ove matrice su

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\gamma.$$

U modelu α i γ su uvijek veći od nule, zato su svojstvene vrijednosti suprotnih predznaka. Stoga fiksna točka poprima oblik „sedla“. Nestabilnost ove početne fiksne točke je bitna. Ako bi bila stabilna, „ne-nula“ populacije bi mogle biti privučene prema njoj, i takvom dinamikom sustava može doći do izumiranja obje vrste populacija.

Međutim, kako je početna fiksna točka sedlo, a time i nestabilna, izumiranje obje vrste u modelu je teško izvedivo. Odnosno, do toga može doći samo ako se plijen u potpunosti iskorijeni, zbog čega grabežljivac umre od gladi. Ako su iskorijeni grabežljivci, populacija plijena raste bez obzira na vezu u ovom jednostavnom modelu.

2.4.1.2. Druga fiksna točka

Računanjem Jacobijana J u drugoj fiksnoj točki dobivamo:

$$J\left(\frac{\gamma}{\delta},\frac{\alpha}{\beta}\right)=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta}\\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Svojstvene vrijednosti ove matrice su

$$\lambda_1=i\sqrt{\alpha\gamma},\quad \lambda_2=-i\sqrt{\alpha\gamma}.$$

Kako su obje svojstvene vrijednosti imaginarne, ova točka nije fiksna hiperbolička, stoga se ne mogu dobiti zaključci iz linearne analize. No, sustav uzima u obzir i konstantna gibanja

$$K=y^{\alpha}e^{-\beta y}\,x^{\gamma}e^{-\delta x}, \tag{12}$$

i razinu krivulje, gdje je K = konst., i zatvorene su putanje oko fiksne točke. Prema tome, razina ciklusa populacije grabežljivca i plijena osciliraju oko ove fiksne točke.
Najveća vrijednost konstante K može se dobiti rješavanjem problema optimizacije

$$y^{\alpha}e^{-\beta y}\,x^{\gamma}e^{-\delta x}=\frac{y^{\alpha}x^{\gamma}}{e^{\delta x+\beta y}}\longrightarrow\max_{x,y>0}. \tag{13}$$

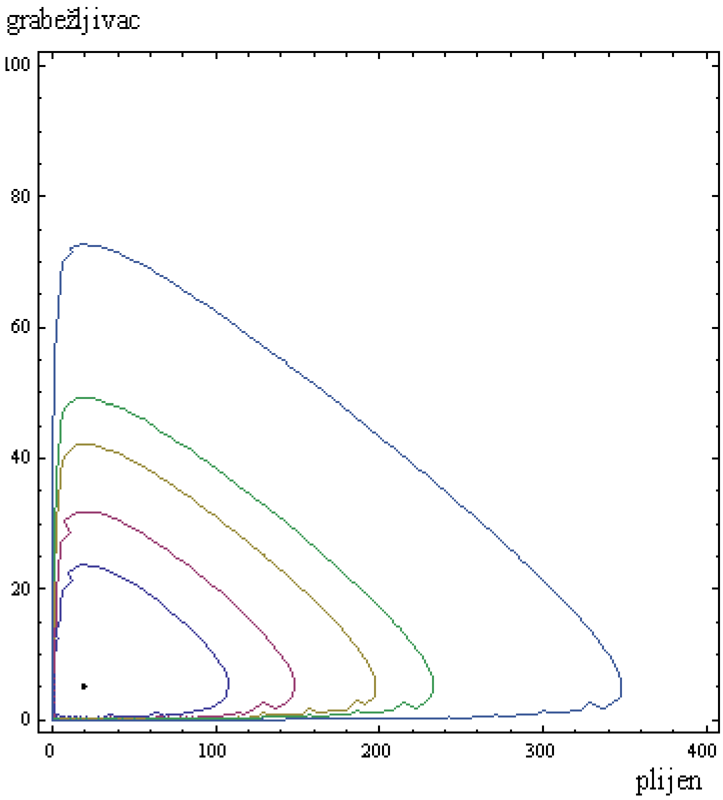
Maksimalna vrijednost K je postignuta u stacionarnoj točki $\left(\frac{\gamma}{\delta},\frac{\alpha}{\beta}\right)$, i to je dano slijedećom jednadžbom

$$K^*=\left(\frac{\alpha}{\beta e}\right)^{\alpha}\left(\frac{\gamma}{\delta e}\right)^{\gamma}, \tag{14}$$

gdje je e Eulerov broj.

U Mathematici se to može prikazati grafički na slijedeći način:

```
rp:=0.5
rg:=0.2

a:=0.1
b:=0.4

pt=p'[t]==rp *p[t]-a *g[t]* p[t];
gt=g'[t]==a *rg *p[t] *g[t]-b*g[t];
system:={pt,gt}

fullsystem:=Join[system,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey=NDSolve[fullsystem,{p,g},{t,0,100}]
curves := Flatten[predprey]
prey:=p[t]/.curves[[1]]
predator:=g[t]/.curves[[2]]

fullsystem1:=Join[system,{p[0]==30,g[0]==30}]
predprey1=NDSolve[fullsystem1,{p,g},{t,0,100}]
curves1 := Flatten[predprey1]
prey1:=p[t]/.curves1[[1]]
predator1:=g[t]/.curves1[[2]]

fullsystem2:=Join[system,{p[0]==20,g[0]==20}]
predprey2=NDSolve[fullsystem2,{p,g},{t,0,100}]
curves2 := Flatten[predprey2]
prey2:=p[t]/.curves2[[1]]
predator2:=g[t]/.curves2[[2]]

fullsystem3:=Join[system,{p[0]==10,g[0]==10}]
predprey3=NDSolve[fullsystem3,{p,g},{t,0,100}]
curves3 := Flatten[predprey3]
prey3:=p[t]/.curves3[[1]]
predator3:=g[t]/.curves3[[2]]

Kstar:=(rp/(a*e))^rp*(b/(a*rg*e))^b
Show[ContourPlot[{Kstar-2==prey^rp e^-a prey predator^b e^-a rg predator,Kstar-2.5==prey^rp e^-a prey predator^b e^-a rg predator,Kstar-2.8==prey^rp e^-a prey predator^b e^-a rg predator,Kstar-2.9==prey^rp e^-a prey predator^b e^-a rg predator,Kstar-3.0==prey^rp e^-a prey predator^b e^-a rg predator},{predator,0,300},{prey,0,100}],Graphics[Point[{b/(a*rg),rp/a}]]]
```



Slika 4. Grafički prikaz implicitne veze između veličina „plijen“ i „grabežljivac“' preko jednadžbe koja uključuje konstantu K

Slika 4. prikazuje implicitnu vezu između veličina „plijen“ i „grabežljivac“ preko jednadžbe koja uključuje konstantu K. Sustav je fiksiran, odnosno definirani su točni parametri rp, rg, a i b koji se ne mijenjaju. Izračunata je K* te iznosi 3.01323 (K*= 3.01323). Izborom različitih parametara K dobili smo različite trajektorije s istom fiksnom točkom. Konstanta K je manja od K* (K<K*). Povećanjem konstante K dobivamo sve uže trajektorije.

3. AUTOKATALITIČKE REAKCIJE

Autokatalitičke reakcije su kemijske reakcije u kojima je barem jedan od produkata također i reaktant. Brzina jednadžbe autokatalitičkih reakcija je u osnovi nelinearna. Ta nelinearnost može dovesti do spontane generacije reda. Dramatičan primjer za to pronalazimo i u stvarnim sustavima. Stvaranje spontanog reda kontradiktorno je drugom zakonu termodinamike, što se može razriješiti kada se uzmu u obzir entropije sustava i njegove okoline.

Najjednostavnija autokatalitička reakcija može se napisati kao:

$$A + B \rightleftharpoons 2B \tag{15}$$

sa redovima reakcije:

$$\frac{d}{dt}\{A\} = -k_{+}\{A\}\{B\} + k_{-}\{B\}^2 \tag{16}$$

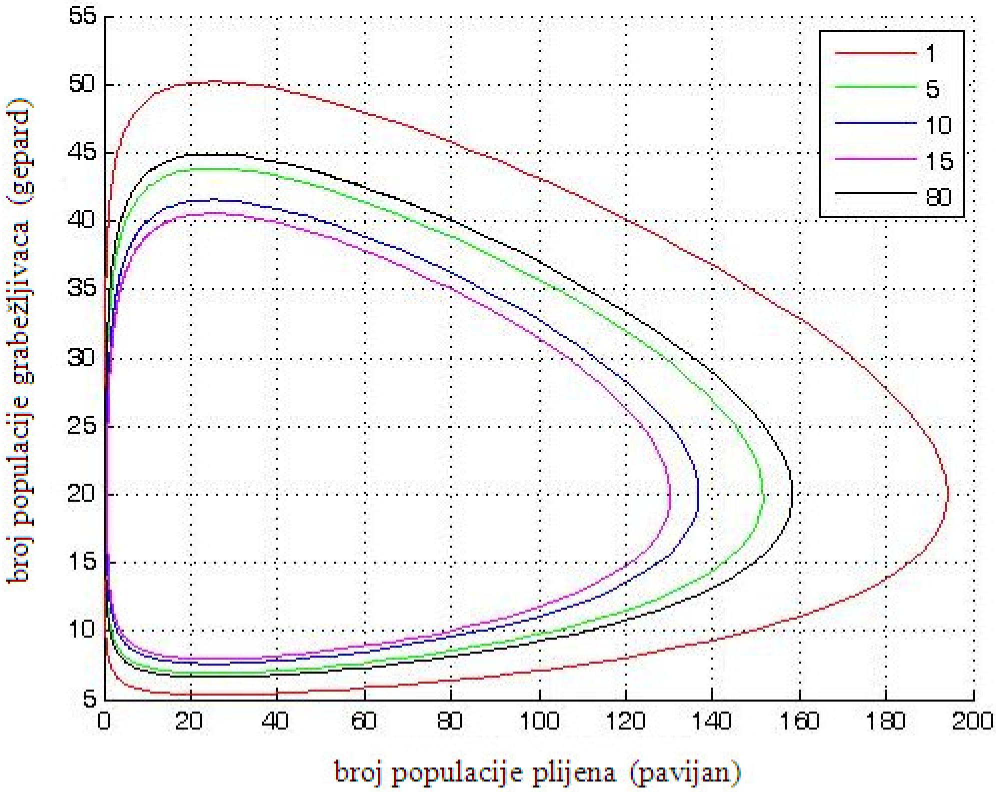
$$\frac{d}{dt}\{B\} = k_{+}\{A\}\{B\} - k_{-}\{B\}^2 \tag{17}$$

Ovo je reakcija u kojoj jedna molekula vrste A reagira sa molekulom vrste B. Molekula vrste A se prelazi u molekulu vrste B. Konačnog produkt se sastoji od originalnih molekula vrste B i molekule vrste B nastalih reakcijom (onih nastalih iz molekule vrste A).

Ključno obilježje tih redova reakcija je da su nelinearne; drugi izraz na desnoj strani jednadžbe predstavlja kvadrat koncentracije molekule vrste B što može dovesti do više fiksnih točaka sustava. Slično kao kvadratne jednadžbe i ova može imati više rješenja . Više fiksnih točaka omogućuje različita stanja sustava.

3.1. Idealizirani primjer Lotka-Volterra jednadžbe

Lotka-Volterra jednadžba može se usporediti s modelom grabežljivac - plijen i modelom dvije autokatalitičke reakcije. U ovom primjeru pavijani i gepardi su ekvivalentni dvjema različitim kemijskim vrstama u autokatalitičkoj reakciji.



Slika 5. Parcijalna rješenja prirodne oscilacije populacija grabežljivca i plijena

Razmatrane su zajedno dvije autokatalitičke reakcije u kojima je koncentracija jednog od reaktanata A puno veća od njegove vrijednosti u ravnoteži. U tom slučaju prvobitna brzina reakcije nastajanja reaktanata je znatno veća od brzine povratne reakcije, pa se brzina povratne reakcije može zanemariti.

$$A + X \rightarrow 2X \tag{18}$$

$$X + Y \rightarrow 2Y \tag{19}$$

$$Y \rightarrow E \tag{20}$$

sa stopama jednadžbi

$$\frac{d}{dt}\{X\} = k_1\{A\}\{X\} - k_2\{X\}\{Y\} \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}\{Y\} = k_2\{X\}\{Y\} - k_3\{Y\} \quad . \tag{22}$$

Ovdje smo zanemarili trošenje reaktanta A, jer je njegova koncentracija jako velika. Konstante brzine za tri reakcije su k_1, k_2 i k_3.

Ovaj sustav jednadžbi je poznat kao Lotka-Volterra jednadžba i najčešće je usko povezana s dinamikom odnosa populacije grabežljivac-plijen. Ovaj sustav jednadžbi ima oscilacije u ponašanju. Amplitude oscilacija ovisi o koncentraciji A. Oscilacije ovog tipa proizlaze iz privremenog redoslijeda koji nije prisutan u ravnoteži.

4. PRIMJER LOTKA-VOLTERRA MODELA U MATHEMATICI

Model Lotka-Volterra u Mathematici može se prikazati:

- Plijen

```
pt=p'[t]==rp *p[t]-a *g[t]* p[t],
```

- Grabežljivac

```
gt=g'[t]==a *rg *p[t] *g[t]-b*g[t],
```

gdje je:

* pt – promjena populacije plijena

* gt –promjena populacije grabežljivca

* p[t] – „gustoća“ populacije plijena

* g[t] – „gustoća“ populacije grabežljivca

* rp – stopa rasta jedinke plijena

* rg – stopa rasta jedinke grabežljivca

* a – stopa napada grabežljivca

* b – stopa umiranja grabežljivca bez plijena

Nakon što se ispiše model u Mathematici i odrede početni uvjeti;

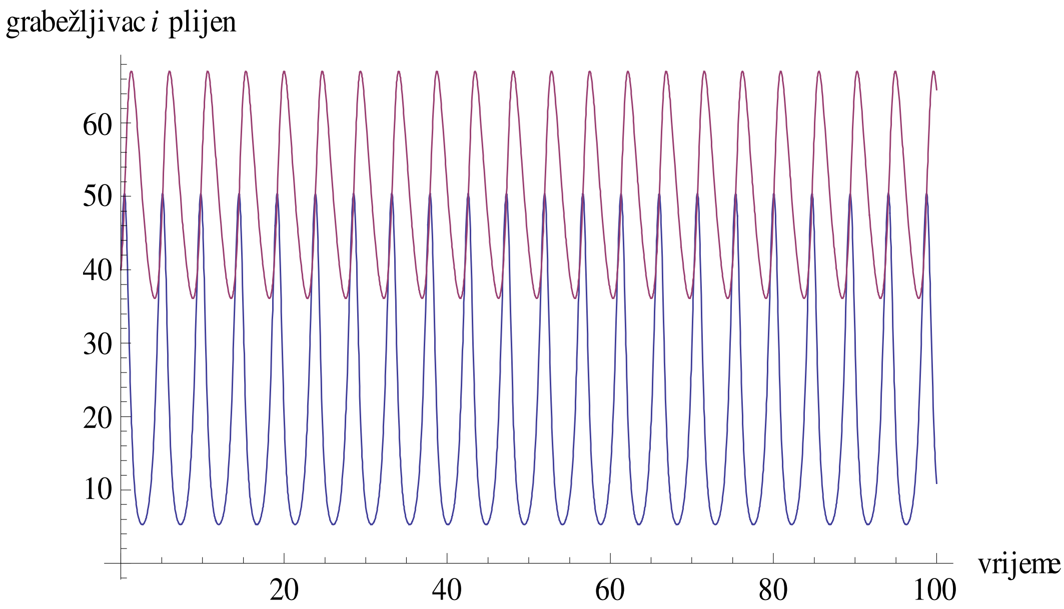
```
rp:=5
rg:=0.2

a:=0.1
b:=0.4

fiksnatocka:={b/(a*rg),rp/a}

pt=p'[t]==rp *p[t]-a *g[t]* p[t];
gt=g'[t]==a *rg *p[t] *g[t]-b*g[t];
system:={pt,gt}
```

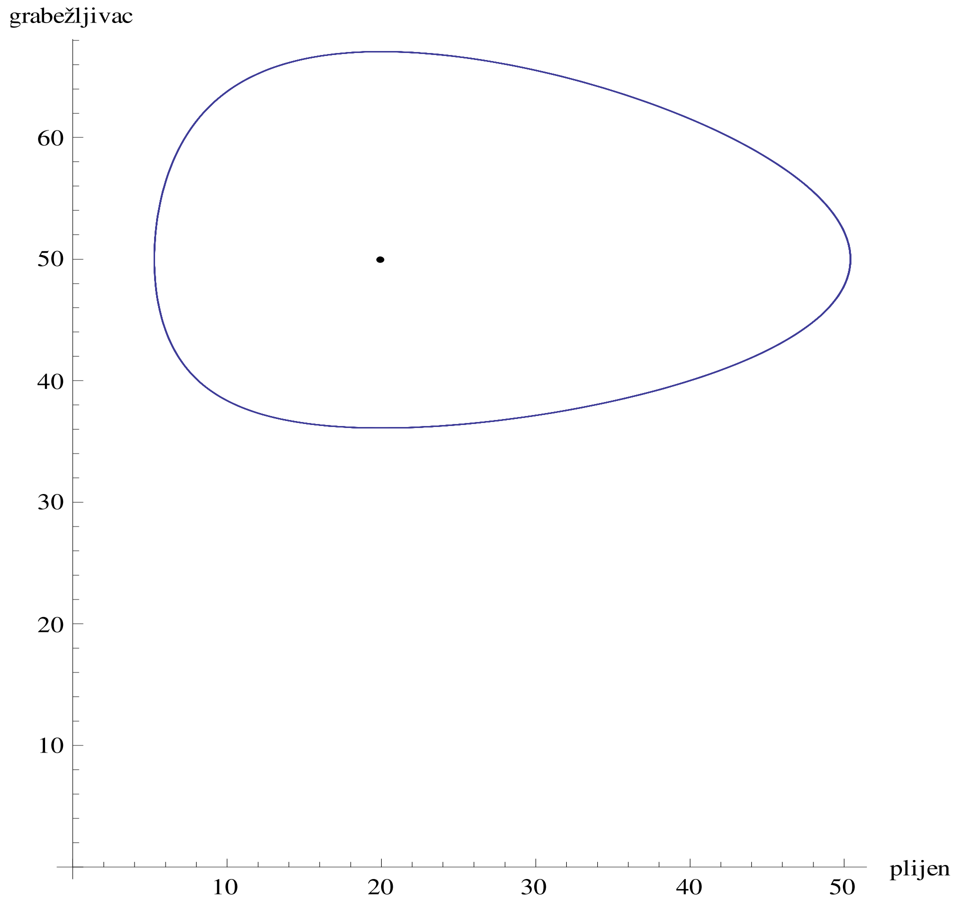
```
fullsystem:=Join[system,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey=NDSolve[fullsystem,{p,g},{t,0,100}]
curves := Flatten[predprey]
prey:=p[t]/.curves[[1]]
predator:=g[t]/.curves[[2]]
```

```
Show[Plot[{prey,predator},{t,0,100},PlotRange →
All],AxesLabel→{vrijeme, plijen i grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0}]
Show[ParametricPlot[{{prey,predator}},{t,0,100},PlotRange →
All,AxesLabel→{plijen,grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0}],Graphics[Point[fiksnatocka]]]
```

dobiva se sljedeće:

```
{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}
```





Slika 6. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu populacija plijena i grabežljivaca za početne uvjete

Na x-osi je prikazana populacija plijena, dok y-os označava populaciju grabežljivaca. Parametri se mogu povećavati i smanjivati, a time se i mijenja odnos populacija plijen-grabežljivac. U idućim primjerima prikazane se neke od promjena.

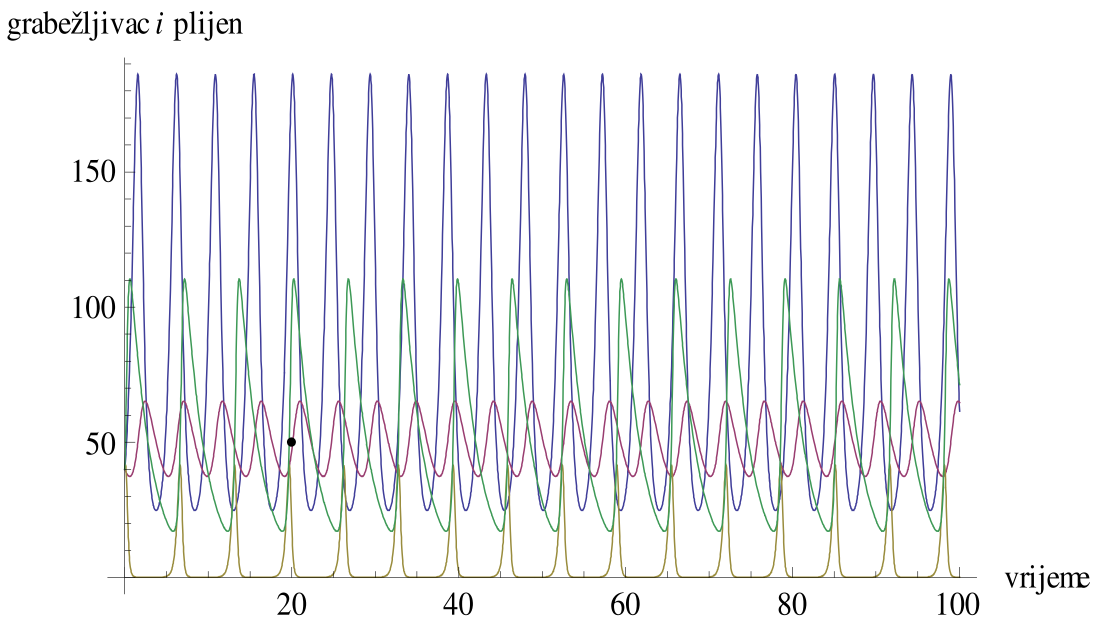
4.1. Promjena stope rasta grabežljivaca → rg

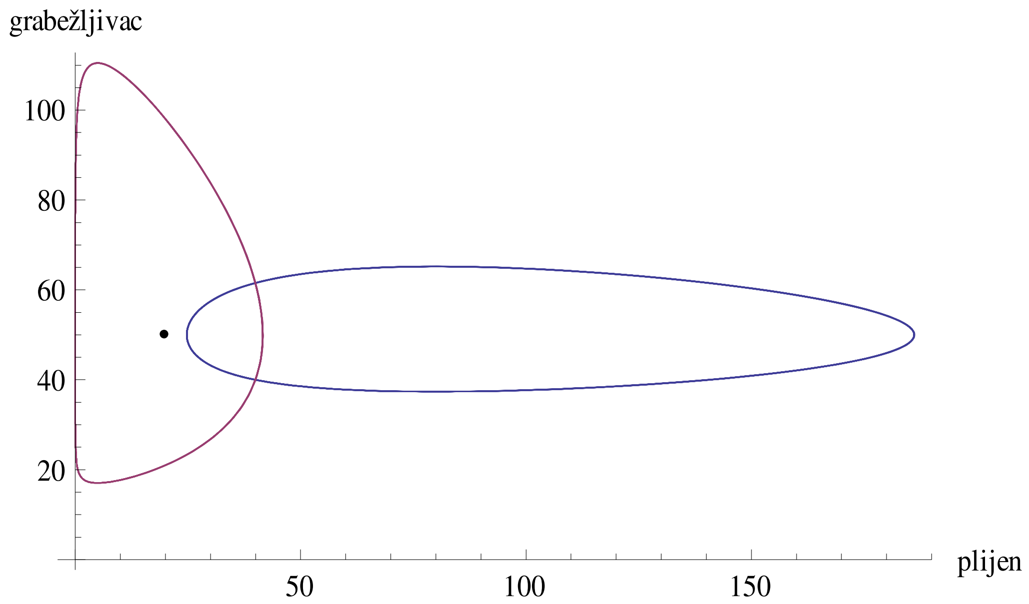
- Smanjenje rg parametra

```
pt=p'[t]==rp *p[t]-a *g[t]* p[t];
gt=g'[t]==a *rg *p[t] *g[t]-b*g[t];
system:={pt,gt}
predsystem:=system/.{rp→5,rg→0.05,a→0.1,b→0.4}
fullsystem:=Join[predsystem,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey=NDSolve[fullsystem,{p,g},{t,0,100}]
curves := Flatten[predprey]
prey:=p[t]/.curves[[1]]
predator:=g[t]/.curves[[2]]
```

- Povećanje rg parametra

```
predsystem1:=system/.{rp→5,rg→ 0.8,a→ 0.1, b→ 0.4}
fullsystem1:=Join[predsystem1,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey1=NDSolve[fullsystem1,{p,g},{t,0,100}]
curves1 := Flatten[predprey1]
prey1:=p[t]/.curves1[[1]]
predator1:=g[t]/.curves1[[2]]

Show[Plot[{{prey,predator},{prey1,predator1}},{t,0,100},AxesLa
bel→{vrijeme, plijen i grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0},PlotRange → All],Graphics[Point[{20,50}]]]
Show[ParametricPlot[{{prey,predator},{prey1,predator1}},{t,0,1
00},AxesLabel→{plijen,grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0}],Graphics[Point[{20,50}]]]
```





Slika 7. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu stope rasta grabežljivaca

Slika 7. pokazuje da se smanjenjem stope rasta populacije grabežljivaca povećava populacija plijena, dok povećanjem iste (stope rasta populacije grabežljivaca) populacija plijena se smanjuje prema nuli (plijen postaje hrana grabežljivcima i počinje izumirati).

4.2. Promjena stope rasta plijena → rp

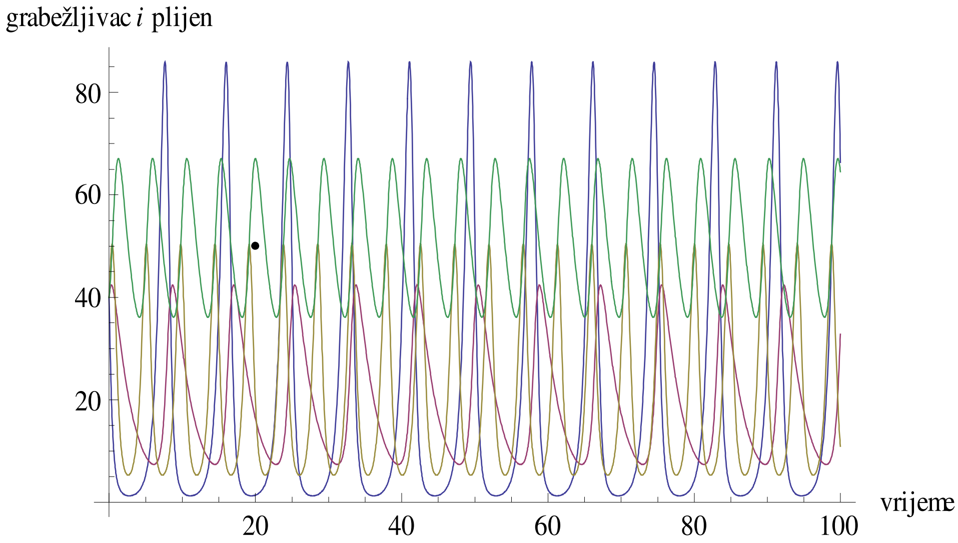
- Smanjenje rp parametra

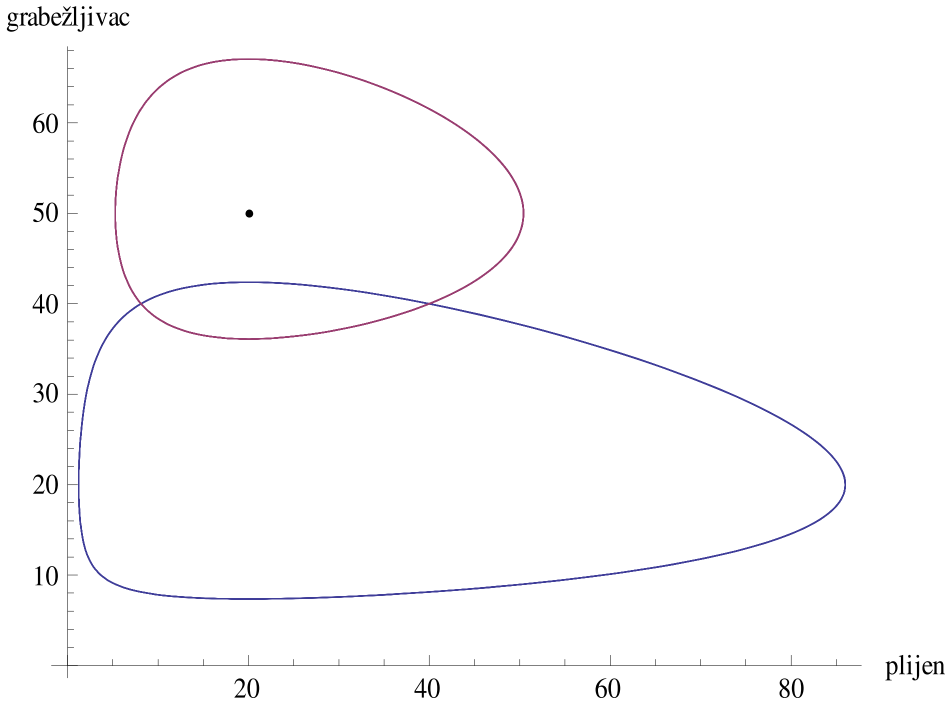
```
pt=p'[t]==rp *p[t]-a *g[t]* p[t];
gt=g'[t]==a *rg *p[t] *g[t]-b*g[t];
system:={pt,gt}
predsystem:=system/.{rp→2,rg→0.2,a→0.1,b→0.4}
fullsystem:=Join[predsystem,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey=NDSolve[fullsystem,{p,g},{t,0,100}]
curves := Flatten[predprey]
prey:=p[t]/.curves[[1]]
predator:=g[t]/.curves[[2]]
```

- Povećanje rp parametra

```
predsystem1:=system/.{rp→5,rg→0.2,a→0.1, b→0.4}
fullsystem1:=Join[predsystem1,{p[0] → 40,g[0] → 40}]
predprey1=NDSolve[fullsystem1,{p,g},{t,0,100}]
curves1 := Flatten[predprey1]
prey1:=p[t]/.curves1[[1]]
predator1:=g[t]/.curves1[[2]]
```

```
Show[Plot[{{prey,predator},{prey1,predator1}},{t,0,100},AxesLa
bel→{vrijeme, plijen i grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0},PlotRange → All],Graphics[Point[{20,50}]]]
Show[ParametricPlot[{{prey,predator},{prey1,predator1}},{t,0,1
00},AxesLabel→{plijen,grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0}],Graphics[Point[{20,50}]]]
```





Slika 8. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu stope rasta plijena

Slika 8. pokazuje da se smanjenjem stope rasta plijena smanjuje se i populacija grabežljivaca (smanjuju se zalihe hrane za grabežljivce), dok povećanjem iste (stope rasta plijena) povećava se i populacija grabežljivca (povećava se zaliha hrane za grabežljivce). Možemo zaključiti da zalihe hrane za grabežljivca ovise isključivo o populaciji plijena.

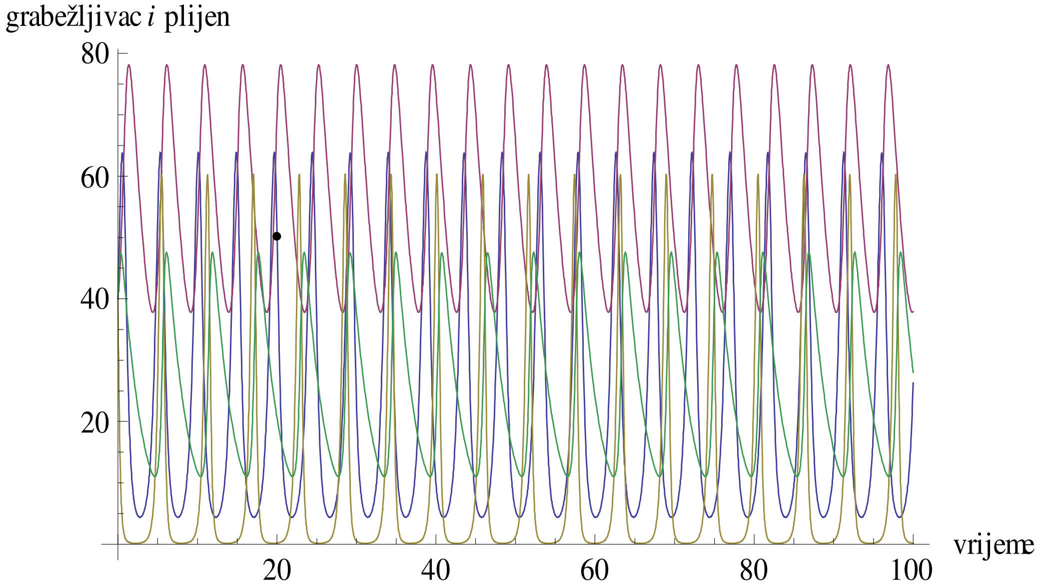
4.3. Promjena stope napada grabežljivca → a

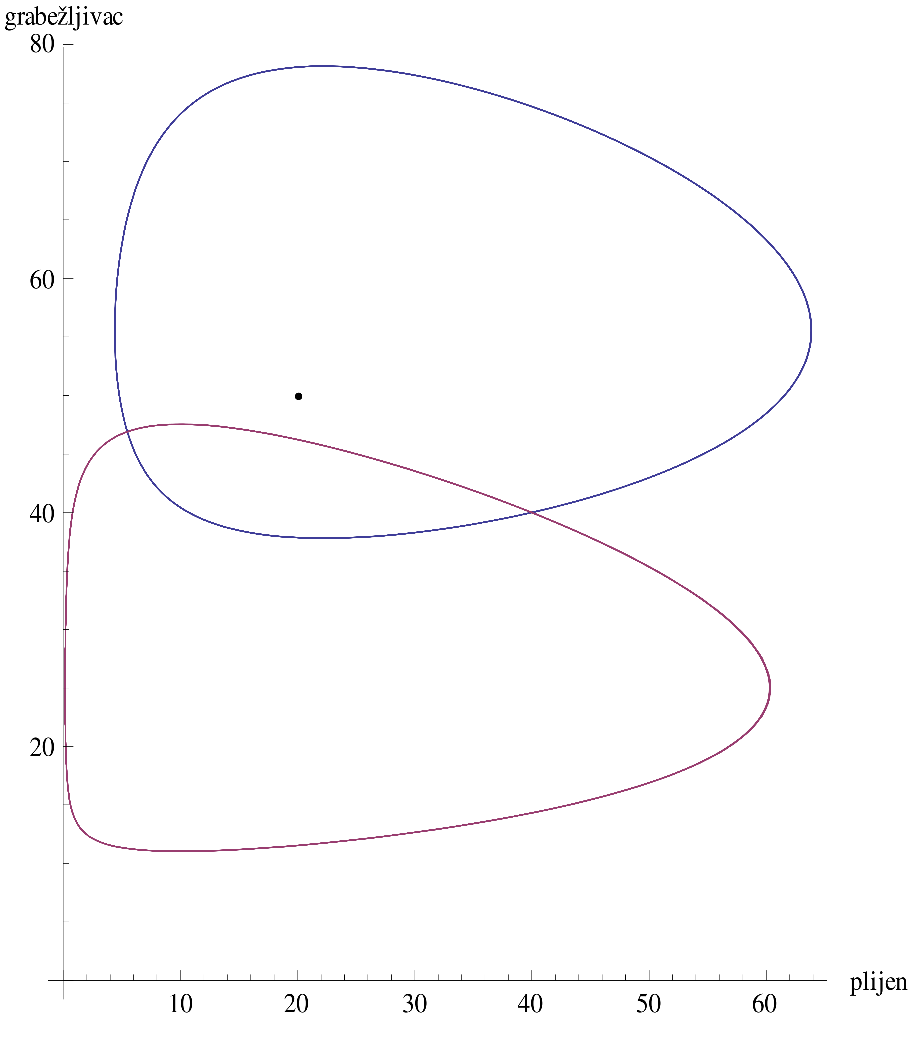
- Smanjenje parametra a

```
pt=p'[t]==rp *p[t]-a *g[t]* p[t];
gt=g'[t]==a *rg *p[t] *g[t]-b*g[t];
system:={pt,gt}
predsystem:=system/.{rp→5,rg→0.2,a→0.09,b→0.4}
fullsystem:=Join[predsystem,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey=NDSolve[fullsystem,{p,g},{t,0,100}]
curves := Flatten[predprey]
prey:=p[t]/.curves[[1]]
predator:=g[t]/.curves[[2]]
```

- Povećanje parametra a

```
predsystem1:=system/.{rp→ 5,rg→0.2,a→0.2, b→0.4}
fullsystem1:=Join[predsystem1,{p[0] → 40,g[0] → 40}]
predprey1=NDSolve[fullsystem1,{p,g},{t,0,100}]
curves1 := Flatten[predprey1]
prey1:=p[t]/.curves1[[1]]
predator1:=g[t]/.curves1[[2]]

Show[Plot[{{prey,predator},{prey1,predator1}},{t,0,100},AxesLa
bel→{vrijeme, plijen i grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0},PlotRange → All],Graphics[Point[{20,50}]]]
Show[ParametricPlot[{{prey,predator},{prey1,predator1}},{t,0,1
00},AxesLabel→{plijen,grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0}],Graphics[Point[{20,50}]]]
```





Slika 9. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu stope napada grabežljivaca

Na slici 9. prikazana promjena stope napada grabežljivca, te se može vidjeti da se smanjenjem stope napada grabežljivca povećava populacija plijena (grabežljivci ne napadaju plijen te on preživljava), dok povećanjem stope napada grabežljivca smanjuje se i populacija plijena gotovo do nule (grabežljivac napada plijen, plijen postaje hrana za grabežljivce te izumire).

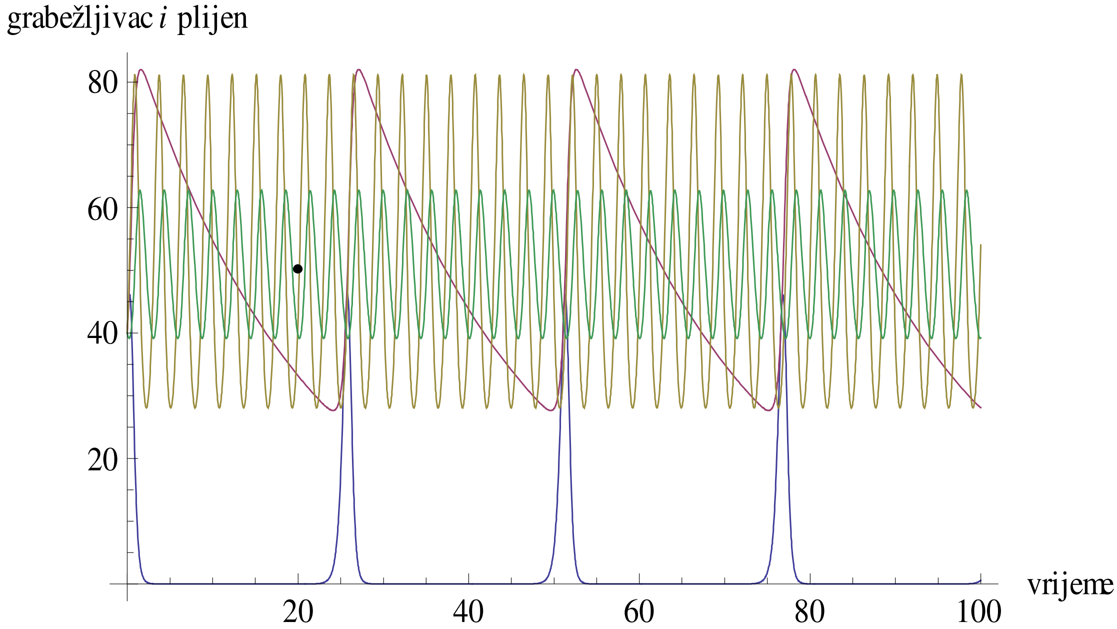
4.4. Promjena stope umiranja grabežljivca bez plijena → b

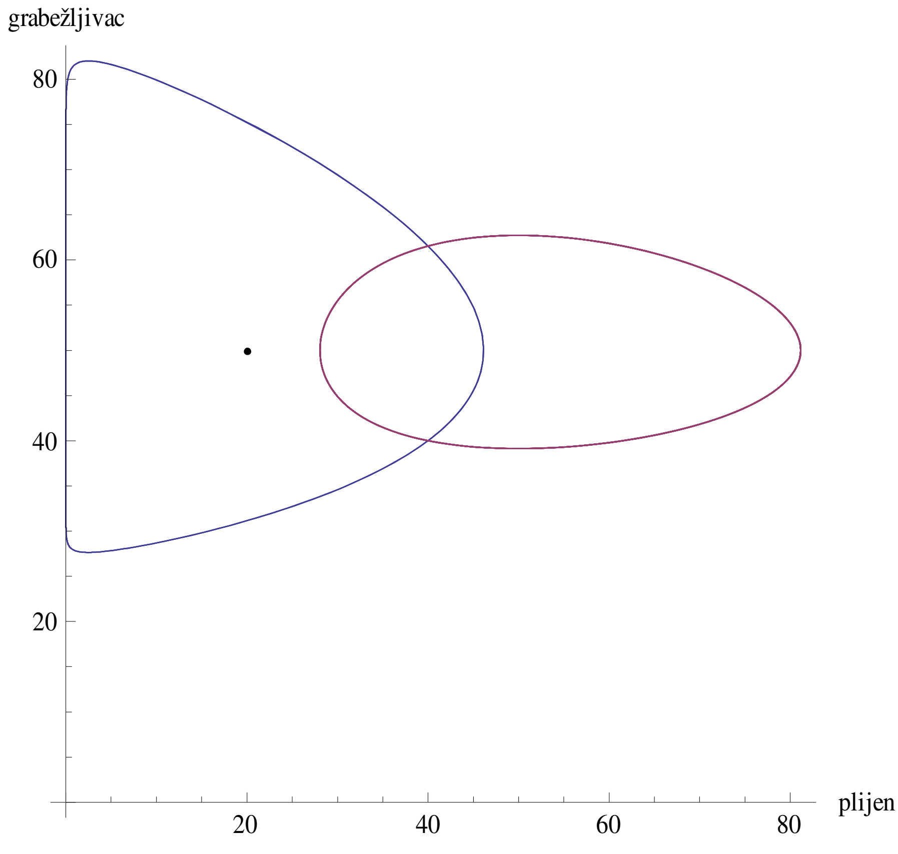
- Smanjenje parametra b

```
pt=p'[t]==rp *p[t]-a *g[t]* p[t];
gt=g'[t]==a *rg *p[t] *g[t]-b*g[t];
system:={pt,gt}
predsystem:=system/.{rp→5,rg→0.2,a→0.1,b→0.05}
fullsystem:=Join[predsystem,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey=NDSolve[fullsystem,{p,g},{t,0,100}]
curves := Flatten[predprey]
prey:=p[t]/.curves[[1]]
predator:=g[t]/.curves[[2]]
```

- Povećanje parametra b

```
predsystem1:=system/.{rp→5,rg→ 0.2,a→ 0.1, b→ 1}
fullsystem1:=Join[predsystem1,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey1=NDSolve[fullsystem1,{p,g},{t,0,100}]
curves1 := Flatten[predprey1]
prey1:=p[t]/.curves1[[1]]
predator1:=g[t]/.curves1[[2]]

Show[Plot[{{prey,predator},{prey1,predator1}},{t,0,100},AxesLa
bel→{vrijeme, plijen i grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0},PlotRange → All],Graphics[Point[{20,50}]]]

Show[ParametricPlot[{{prey,predator},{prey1,predator1}},{t,0,1
00},AxesLabel→{plijen,grabežljivac},AxesOrigin→
{0,0}],Graphics[Point[{20,50}]]]
```





Slika 10. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu stope umiranja grabežljivca bez plijena

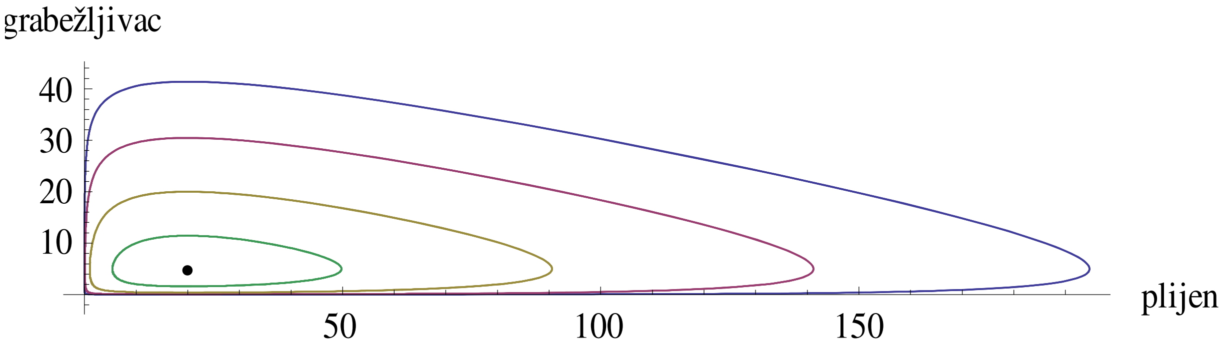
Iz slike 10. možemo vidjeti da povećanjem stope umiranja grabežljivaca bez plijena populacija plijena raste, odnosno populacija plijena se polako oporavlja, dok smanjenjem stope umiranja grabežljivaca populacija grabežljivaca raste, a također i populacija plijena sve dok broj populacije grabežljivaca ne „prestigne“ broj populacije plijena kada se on počinje smanjivati.

4.5. Promjena početnih uvjeta

Nakon što se ispiše model u Mathematici i odrede parametri, također se može grafički prikazati i sustav s istim parametrima, ali s različitim početnim uvjetima (slika 11.). Ti sustavi imaju istu fiksnu točku.

```
rp:=0.5
rg:=0.2

a:=0.1
b:=0.4

fiksnatocka:={b/(a*rg),rp/a}

pt=p'[t]==rp *p[t]-a *g[t]* p[t];
gt=g'[t]==a *rg *p[t] *g[t]-b*g[t];
system:={pt,gt}

fullsystem:=Join[system,{p[0]==40,g[0]==40}]
predprey=NDSolve[fullsystem,{p,g},{t,0,100}]
curves := Flatten[predprey]
prey:=p[t]/.curves[[1]]
predator:=g[t]/.curves[[2]]

fullsystem1:=Join[system,{p[0]==30,g[0]==30}]
predprey1=NDSolve[fullsystem1,{p,g},{t,0,100}]
curves1 := Flatten[predprey1]
prey1:=p[t]/.curves1[[1]]
predator1:=g[t]/.curves1[[2]]

fullsystem2:=Join[system,{p[0]==20,g[0]==20}]
predprey2=NDSolve[fullsystem2,{p,g},{t,0,100}]
curves2 := Flatten[predprey2]
prey2:=p[t]/.curves2[[1]]
predator2:=g[t]/.curves2[[2]]

fullsystem3:=Join[system,{p[0]==10,g[0]==10}]
predprey3=NDSolve[fullsystem3,{p,g},{t,0,100}]
curves3 := Flatten[predprey3]
prey3:=p[t]/.curves3[[1]]
predator3:=g[t]/.curves3[[2]]
```

```
Show[ParametricPlot[{{prey,predator},{prey1,predator1},{prey2,
predator2},{prey3,predator3}},{t,0,100},PlotRange →
All,AxesOrigin→ {0,0}],Graphics[Point[fiksnatocka]]]
```



Slika 11. Grafički prikaz sustava s različitim početnim uvjetima

Definirani su parametri

- rp(stopa rasta jedinke plijena) = 0.5
- rg(stopa rasta jedinke grabežljivca) = 0.2
- a(stopa napada grabežljivca) = 0.1
- b(stopa umiranja grabežljivca bez plijena) = 0.4

Smanjenjem početnih uvjeta (u ovom slučaju sa 40 do 10), odnosno početne „gustoće“ populacije plijena i grabežljivca, smanjuje se i odstupanje od fiksne točke. Svaka trajektorija opisuje život sustava za pojedini izabrani početni uvjet. Na x-osi je prikazana populacija plijena, dok y-os označava populaciju grabežljivaca.

5. ZAKLJUČAK

Lotka-Volterra jednadžbe imaju glavnu ulogu u matematičkom modeliranju različitih bioloških (ekoloških) i kemijskih sustava. To su nelinearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda koje se često koriste za opisivanje dinamike bioloških sustava u kojima djeluju međusobno dvije vrste. Također su poznate kao jednadžbe grabežljivac-plijen.

Mijenjanjem određenih parametara i početnih uvjeta dolazimo do različitih odnosa populacija plijen-grabežljivac, koji su prikazani u ovom seminarskom radu.

6. LITERATURA

1. http://matematika.fkit.hr/stari_poslijediplomski.html
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Autocatalytic_reaction
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra_equation
4. http://mathworld.wolfram.com/Lotka-VolterraEquations.html
5. http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/NDSolveLotkaVolterra.html
6. http://demonstrations.wolfram.com/PredatorPreyEquations/